Pasquale Catone

UNA SPIEGAZIONE DIDATTICA DELLA LEGGE DI POISEUILLE E' POSSIBILE

Aprile 2006 - SxT Scaffali N°9

La legge di Poiseuille risulta fondamentale per spiegare il moto laminare nei tubi cilindrici e trova applicazione in diversi campi dalla circolazione nei vasi sanguigni alla determinazione della viscosità e al moto di liquidi nei condotti capillari. Nella didattica della fisica si ricorre sempre all'analogia idraulica per capire e consolidare le leggi di Ohm e i collegamenti di resistenze.
In alcuni testi universitari la legge viene ricavata bilanciando le forze su vari strati cilindrici e calcolando la velocità in funzione del raggio e poi la portata con un paio di integrazioni. In altri si propone il procedimento canonico che utilizza il laplaciano e il gradiente in coordinate cilindriche. In diversi libri e nei testi scolastici da me consultati, la legge viene presentata senza dimostrazione. Con questa situazione mi ero convinto che una spiegazione dell'equazione di Poiseuille, adatta agli studenti della scuola media superiore, fosse impossibile. Ma valutando il procedimento, ho riscontrato che, applicando l'analisi delle forze a tutto il sistema ed esprimendo la velocità in funzione dell'area anziché del raggio della sezione del condotto, si riesce ad elaborare un percorso didattico con strumenti matematici semplici che prende, come dice il proverbio, due piccioni con una sola fava.

Consideriamo il moto laminare (senza vortici) di un liquido in un cilindro orizzontale con portata costante. L'azione della viscosità produce una diminuzione lineare della pressione lungo la corrente, tant'è che i livelli del liquido, in tubicini verticali (piezometri) inseriti nel condotto, si dispongono su una retta decrescente nel senso del moto. Il regime è laminare se la velocità del liquido è sufficientemente bassa, altrimenti il moto diviene turbolento. Per cogliere le caratteristiche del moto, immaginiamo di suddividere il liquido in infiniti strati cilindrici e sottilissimi. Il primo strato aderendo al condotto rimane fermo, il secondo scorre sul primo, il terzo striscia sul secondo e così continuando fino a giungere all'asse del cilindro. Pertanto, la velocità del liquido cresce da zero sulle pareti fino a diventare massima sull'asse del tubo. All'avanzamento di uno strato liquido su un altro si oppone una tensione T, tangente alla superficie di contatto, dovuta alla viscosità n. Risulta che il rapporto tra le variazioni della velocità v e del raggio b dello strato tende, per valori infinitesimi degli incrementi, al quoto tra la tensione T e la viscosità n (liquidi newtoniani), cioè (delta v)/ (delta b) tende a T/n .

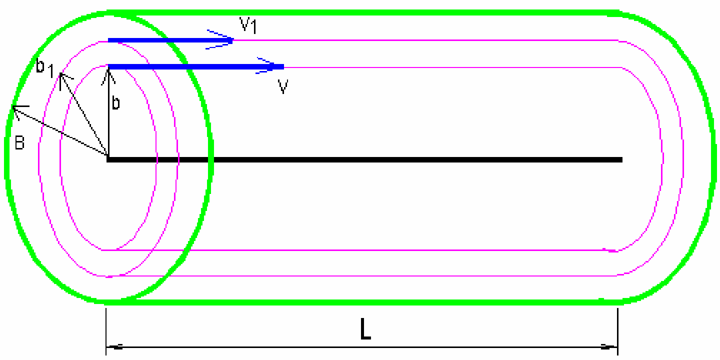

Figura 1

Tra due strati contigui in moto relativo, T contrasta il moto di quello interno e spinge il guscio esterno, ma la risultante tra azione e reazione è nulla per il terzo principio della dinamica. Lo sviluppo della corona circolare delimitata dalle circonferenze C e C_1 porge un trapezio la cui area vale: (delta a) = Cm x (delta b), dove a è l'area del cerchio di raggio b e Cm = $(C_1+C)/2$ è la circonferenza media tra C_1 e C; lo stesso risultato si ricava facilmente anche algebricamente. La tensione viscosa che ostacola il moto di uno strato è uguale al rapporto tra tutta la forza tangenziale F che agisce sulla superficie laterale del guscio e l'area della stessa, ossia T = F / (C L), dove L è la lunghezza dello strato. Sebbene la velocità del liquido diminuisca radialmente fino ad annullarsi sulle pareti, la velocità di ogni strato conserva il suo valore.

Poiché gli strati consecutivi si scambiano azioni e reazioni di risultante nulla, sulla massa cilindrica di raggio b viene esplicata soltanto la forza viscosa F = C L T, cagionata dalla pellicola liquida successiva. Per mantenere il moto uniforme dei singoli strati, la forza viscosa F deve essere equilibrata dalla sollecitazione -a p impartita dalla differenza p delle pressioni agenti sulle basi del cilindro. Ovvero T/n = F/ (CLn) = - a p / (C L n) = - p b / (2 L n). Dunque, (delta v)/ (delta a) = (delta v)/ [Cm (delta b)] ha il valore limite, per strati di spessore infinitesimo, -p b / (2 L n C) = - p / (4 pigreco n L) = -k. Se il rapporto (delta v)/ (delta a), per valori infinitesimi delle variazioni, è una costante negativa -k, significa che il diagramma di v in funzione di a ha un andamento lineare decrescente. Infatti, essendo v(a) rappresentata da una retta, il rapporto (delta v)/(delta a) tra i cateti col proprio segno (finiti o infinitesimi) di triangoli simili si mantiene sempre costante e specifica la pendenza del grafico (fig.2), che in particolare si può scrivere nella forma $-v_o$ /A = -k, da cui si può calcolare la velocità massima del liquido sull'asse del cilindro v_o = A k.

Se una goccia dello strato, che procede alla velocità v, impiega un tempo t a percorrere la lunghezza L, la portata del liquido generata dal medesimo guscio vale (delta Q) = (volume liquido nello strato)/t = (delta a) L/t = v (delta a), che sul piano v(a) corrisponde al rettangolino tratteggiato

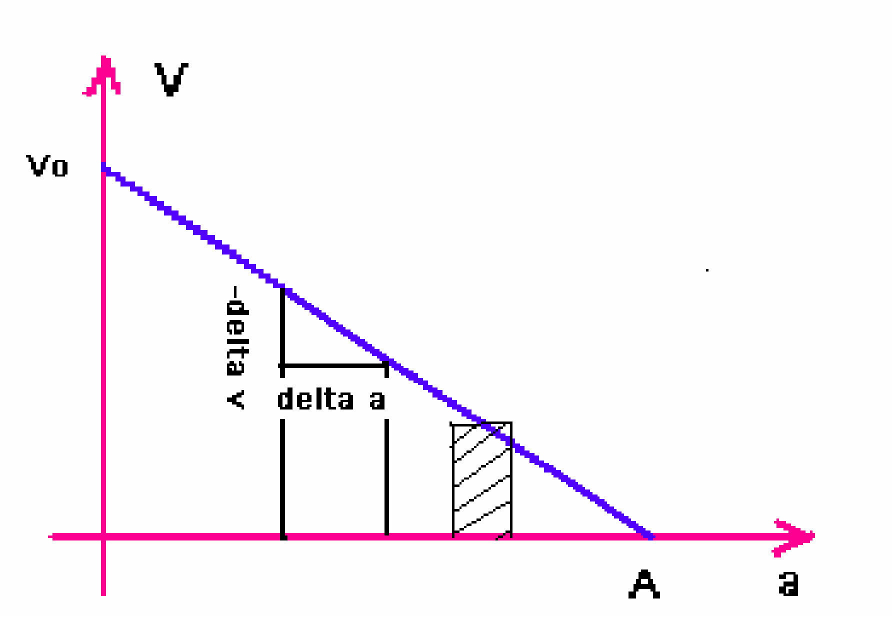

Figura 2

La somma dei rettangolini, resi infinitesimi, dovuti a tutti gli strati indica che la portata Q nel condotto è l'area del triangolo sotteso dal diagramma v(a) data da v_o A/2 e quindi :

$$Q = \frac{\pi B^4 p}{8nL},$$

dove B è il raggio del tubo. Siamo pervenuti alla legge di Poiseuille, secondo cui la portata del liquido in moto laminare in un cilindro è proporzionale direttamente alla differenza di pressione tra i suoi estremi e alla quarta potenza del raggio B, e inversamente alla viscosità del liquido e alla lunghezza del tubo. La dipendenza da questi parametri concorda con l'intuizione, perché ci aspettiamo l'aumento della portata per tubi più larghi e corti e per maggiore pressione e minore viscosità.

L'introduzione della funzione v(a) e il bilancio della risultante sull'intero cilindro hanno spianato il cammino per determinare un metodo didattico, vantaggioso e accessibile finalizzato al calcolo della portata. Difatti, dalla pendenza costante si passa alla linearità del diagramma, che sovrasta un'area proprio uguale alla portata. Un discorso simile viene sviluppato, a livello scolastico, quando nel moto uniformemente vario si procede dall'accelerazione alla velocità e poi allo spazio.
Si può esplicitare la relazione lineare v = v_o (1-a/A), che sull'asse (a = 0) porge la massima velocità v_o e sulle pareti (a = A) dà una v nulla. In termini di raggi si ha l'espressione:

$$v = v_o \left(1 - \frac{b^2}{B^2}\right)$$

e ciò indica che il profilo della velocità del liquido in funzione del raggio è di tipo parabolico col massimo sull'asse e col valore zero sulle pareti del cilindro .

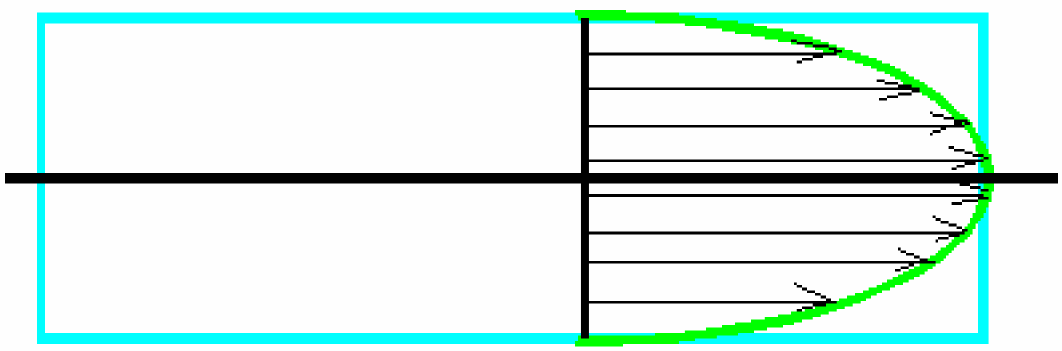

Figura 3

La legge di Poiseuille si può scrivere nella forma p = R Q, dove :

$$R = \frac{8nL}{\pi B^4}$$

si denomina resistenza idraulica, in quanto occorre una pressione proporzionale a R per avere una data portata Q. Vi è una forte analogia tra l'equazione di Poiseuille e la legge di Ohm V = R I, in cui I è l'intensità di corrente che circola in un filo di resistenza elettrica R sottoposto alla tensione V. Nei due circuiti si fanno corrispondere le differenze di pressione e di potenziale, la portata e l'intensità di corrente, la resistenza idraulica ed elettrica. In tal guisa il comportamento di un circuito elettrico si può comprendere facendo leva su congetture più concrete.

E' pur vero che spesso il paragone non è appropriato perché viene stabilito col regime turbolento in cui le perdite di carico sono proporzionali al quadrato della portata. Il confronto opportuno si può spingere oltre, ricordando che la resistenza elettrica è uguale alla resistività moltiplicata per la lunghezza e divisa per la sezione del filo. Dunque, entrambe le resistenze sono proporzionali alla lunghezza; per le dimensioni trasversali vi è una dissonanza, ma ambedue le resistenze diminuiscono con l'aumento del raggio; infine, le due resistenze sono proporzionali a dei coefficienti: la viscosità del liquido e la resistività del materiale.

Per le resistenze idrauliche si può realizzare un collegamento in serie, in cui la portata rimane uguale e le differenze di pressione si sommano nei condotti successivi, ossia $p = p_1+p_2 = (R_1+R_2)Q$; ciò implica che la resistenza complessiva $R = R_1+R_2$ è la somma di quelle parziali R_1 ed R_2.
Nel collegamento in parallelo, in cui i condotti sono vie diverse che uniscono le stesse sezioni (iniziale e finale), la differenza di pressione è la stessa, mentre la portata globale Q è la somma di quelle singole. Perciò $Q = Q_1+Q_2 = p\ (1/R_1 + 1/R_2)$, da cui $1/R = 1/R_1+1/R_2$, ovvero il reciproco della resistenza totale è uguale alla somma dei reciproci di ciascuna resistenza. Allora le resistenze idrauliche in regime laminare si compongono come quelle elettriche nei collegamenti in serie e parallelo.

Siccome sovente capita di collegare elementi in serie e parallelo (resistenze elettriche, idrauliche, termiche, condensatori, molle elastiche, induttanze, impedenze in alternata, riluttanze magnetiche) e le regole di composizione in alcune connessioni vengono scambiate, occorre estrarre il paradigma che è alla base di questi circuiti per carpire l'aspetto unificante che accomuna le varie categorie.
Sia dato un elemento caratterizzato dalla relazione $y = h\ x$, in cui è costante il rapporto h tra le grandezze y e x. Se due di questi componenti distinti dalle quantità x, h_1 e h_2, y_1 e y_2 si uniscono e alla combinazione compete $y = y_1+y_2$ e ancora x, allora risulta anche che il coefficiente equivalente è $h = h_1+h_2$. Ne segue che è additivo il coefficiente della grandezza che rimane invariata per ciascun elemento e per il loro insieme. Evidentemente l'asserto è valido anche per $x = y/h$ con $1/h = 1/h_1 + 1/h_2$, se y è costante e x è additiva. In sintesi per più elementi individuati da grandezze in un rapporto costante, che si compongono conservando una grandezza e sommando l'altra, sono additivi i coefficienti del parametro che rimane invariato nell'assemblaggio.